PRINCIP A MOŽNOSTI MATEMATICKÉHO MODELOVÁNÍ

Jan Pruška

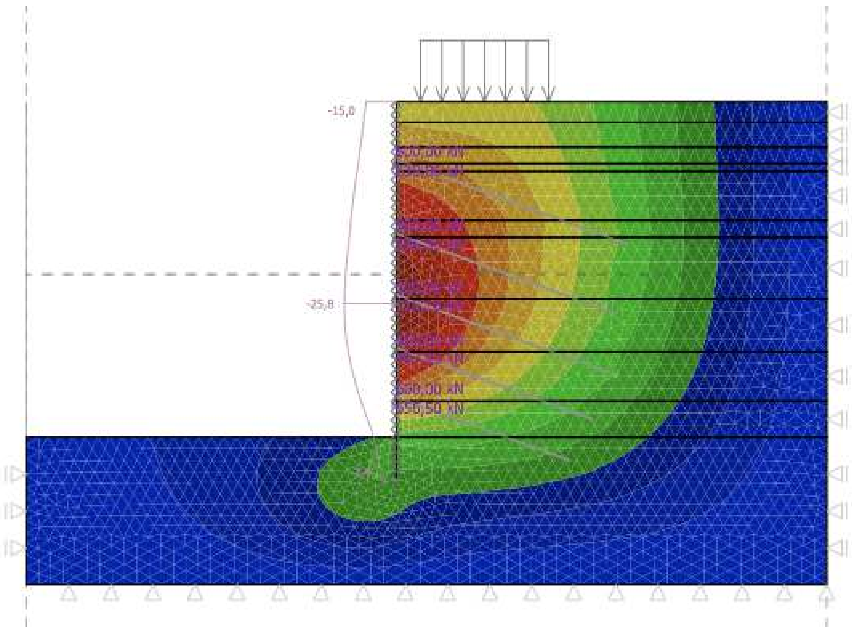
Fakulta stavební ČVUT v Praze

OBSAH

1. ÚVOD

Prof. A. Myslivec:

„přírodu nelze vystihnout žádnými čísly”



?

1. ÚVOD

<u>METODY ŘEŠENÍ ÚLOH GEOMECHANIKY</u>

OBSERVAČNÍ

SEMIANALYTICKÉ

ANALYTICKÉ

FYZIKÁLNÍ MODELOVÁNÍ

NUMERICKÉ MODELOVÁNÍ

V minulosti převládal zájem o analytické metody a fyzikální modelování.

1. ÚVOD

ANALYTICKÉ METODY

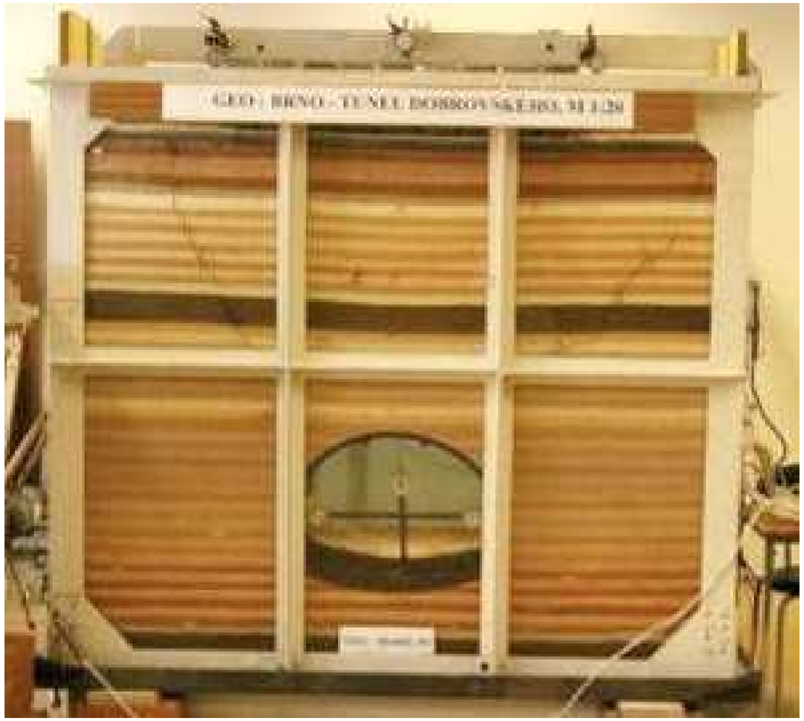
- řeší soustavu diferenciálních rovnic analytickými prostředky (s využitím Airyho funkce napětí)
- malé nároky na přípravu vstupních dat
- krátká doba výpočtu
- výsledek dostáváme ve tvaru funkce
- větší míra zjednodušení daného modelu

(např. homogenní prostředí, kruhový výrub)

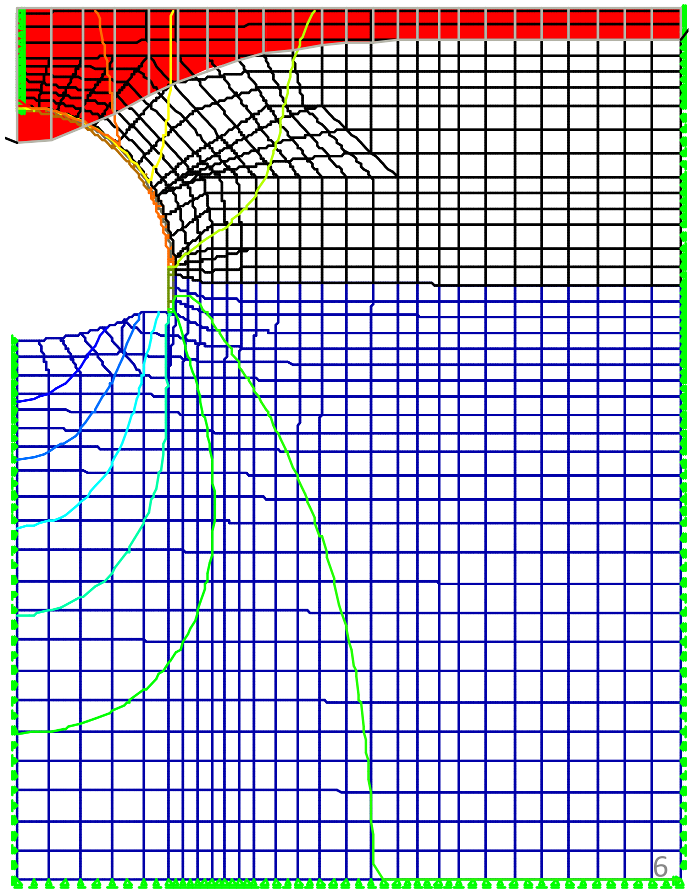
1. ÚVOD

MODELOVÁNÍ

FYZIKÁLNÍ



NUMERICKÉ



1. ÚVOD

NUMERICKÉ MODELY

- převádí soustavu diferenciálních rovnic na soustavu lineárních algebraických rovnic
- menší míra zjednodušení skutečnosti
  - možno zahrnout nehomogenitu, tvar díla ...
- větší časová náročnost
  - přípravy dat, výpočtu a vyhodnocení výsledků
- řešení dostáváme nikoliv ve tvaru funkce, ale ve tvaru hodnot v diskrétních bodech sítě

1. ÚVOD

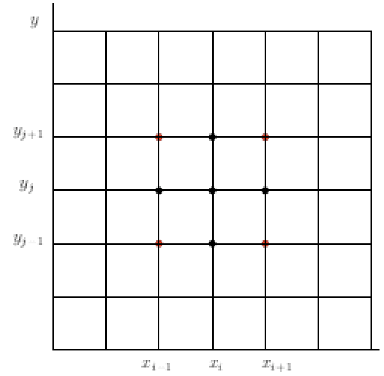
ZÁKLADNÍ TYPY NUMERICKÝCH METOD

- Metoda konečných diferencí (sítí)
  (Finite diference method – FDM)
- Metoda konečných prvků
  (Finite element method – FEM)
- Metoda hraničních prvků
  (Boundary element method – BEM)
- Metoda oddělených prvků
  (Distinct element method – DEM)

1. ÚVOD

METODA KONEČNÝCH DIFERENCÍ (SÍTÍ)

Řešenou oblast pokryjeme sítí uzlových bodů a v nich provedeme náhradu derivací



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f$$

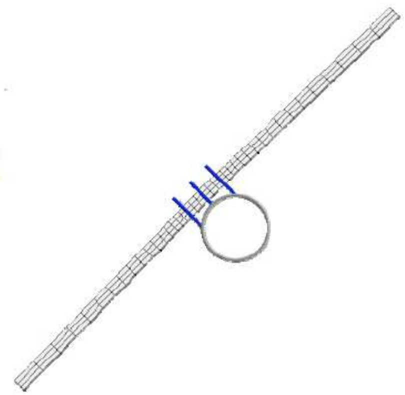
příslušnými diferencemi

$$\frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{\Delta y^2} = f_{i,j}$$

a řešíme soustavu vzniklých algebraických lineárních diferenčních rovnic.

1. ÚVOD

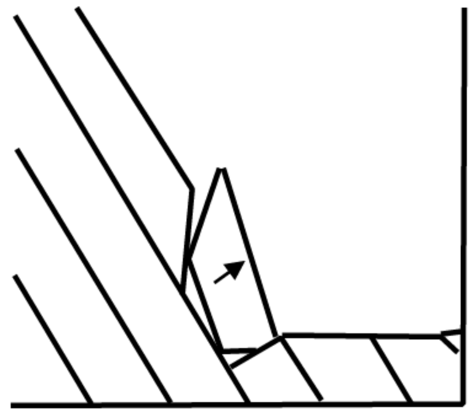
<u>METODA HRANIČNÍCH PRVKŮ</u>



- snižuje dimenzi úlohy
  - 3D na 2D apod.
- diskretizuje se pouze hranice řešené oblasti
  - diskretizace konstantními prvky
- uvnitř oblasti dostáváme přesné řešení z numericky získaných hodnot na hranici
- řešení předpokládá homogenní prostředí
- nutno znát pro jednotlivé typy úloh fundamentální řešení (publikována v literatuře)

1. ÚVOD

<u>METODA ODDĚLENÝCH PRVKŮ</u>

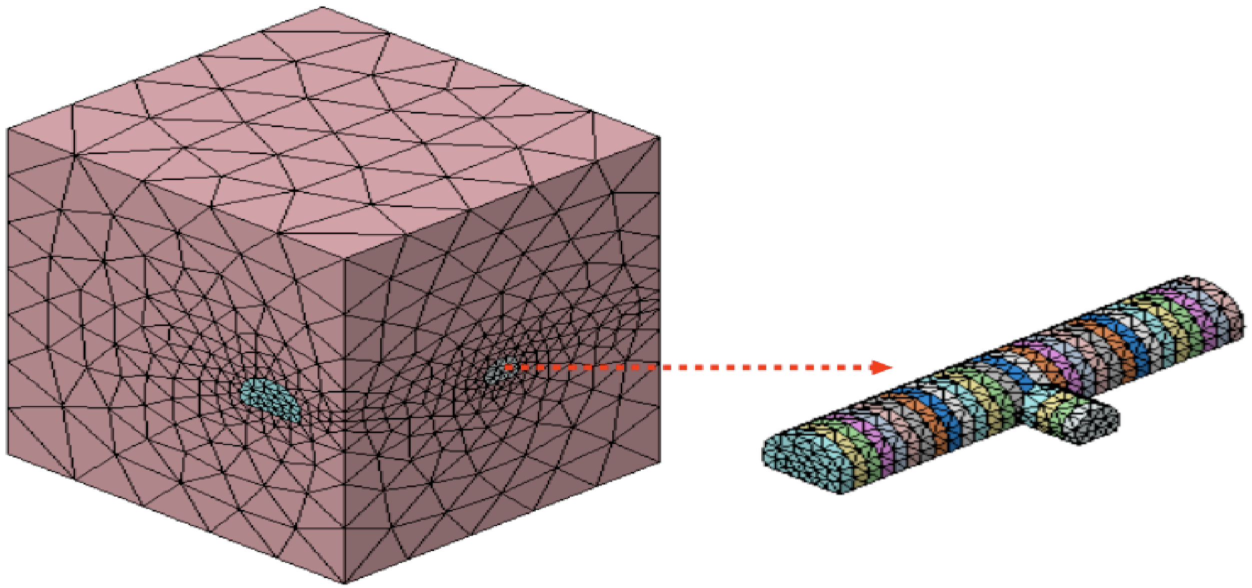


- pro modelování diskontinua
- modeluje se interakce tuhých i deformovatelných bloků
- pro výpočet je využita modifikovaná explicitní metoda konečných diferencí - ve výpočetním cyklu se řeší dynamická rovnováha
- umožňuje modelovat statické a dynamické úlohy, porušení látek včetně velkých deformací, smykání a separace bloků, modelování proudění kapalin v puklinách a sdružené úlohy

1. ÚVOD

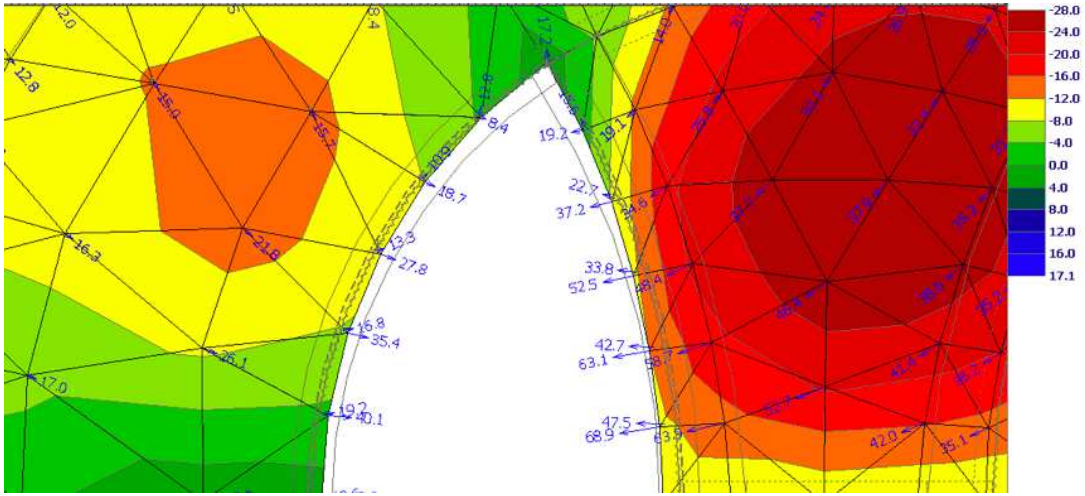
METODA KONEČNÝCH PRVKŮ (MKP)

Nejčastěji užívaná, systematická a univerzální metoda pro numerické řešení problému mechaniky, patří mezi variační metody.

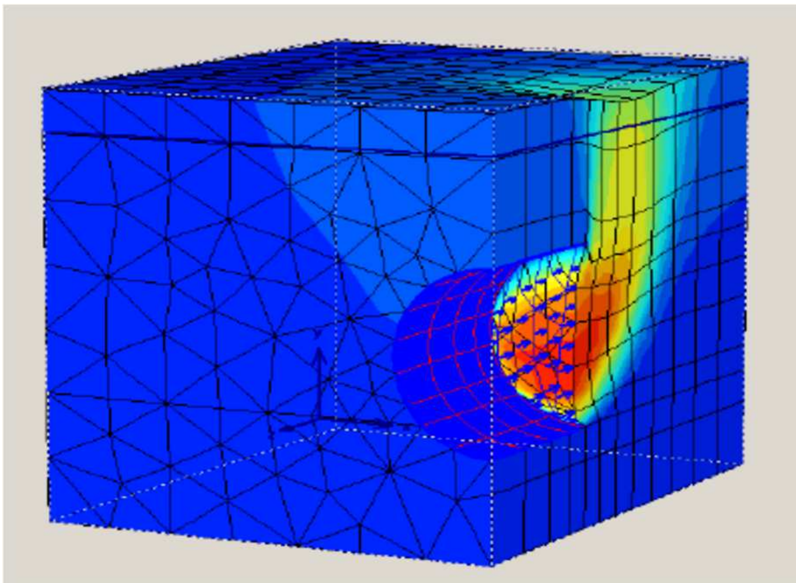


2. MKP OBECNĚ

2D MKP



3D MKP



2. MKP OBECNĚ

DEFORMAČNÍ VARIANTA MKP

řešíme úlohu v posunech

SILOVÁ VARIANTA MKP

řešíme úlohu v napětích

HYBRIDNÍ VARIANTA MKP

řešíme úlohu pro posuny i napětí

Téměř všechny komerční programy jsou založeny na deformační variantě MKP.

2. MKP OBECNĚ

VÝHODY MKP

- pracovat z komplexní geometrií řešené oblasti
- provádět komplexní analýzu
- uvažovat komplexní zatížení
- analyzovat fáze výstavby

2. MKP OBECNĚ

NEVÝHODY MKP

- Výsledkem není nikdy obecně platné řešení – vždy se jedná o chování numerického modelu
- Řešení numerického modelu je aproximační – tj. nepřesnost jednoho výsledku ovlivní i další následující výsledek

2. MKP OBECNĚ

NEVÝHODY MKP

- Pro vytvoření dobrého numerického modelu a jeho vyhodnocení je nutné mít zkušenost a určité odborné znalosti
- Vlastnit software a poměrně výkonné PC (zvláště pro 3D MKP)
- Příprava vstupních dat a získání výsledků je časově náročné

2. MKP OBECNĚ

CO PŘINÁŠÍ MKP PROJEKTANTOVI

- Jednoduché zavedení komplexní geometrie
- Uvažovat objekty složené z různých materiálů
- Možnost řešit časově závislé úlohy
- Řešení lineárních a nelineárních úloh
- Jedna metoda může řešit celou škálu problémů od mechaniky tuhých těles, až po proudění tepla

2. MKP OBECNĚ

CO PŘINÁŠÍ MKP PROJEKTANTOVI

- Software může být na normálních PC.
- Propojení s programy CAD
- Uživatelsky příjemné rozhraní
- Pre a post procesory usnadňující analýzu.

2. MKP OBECNĚ

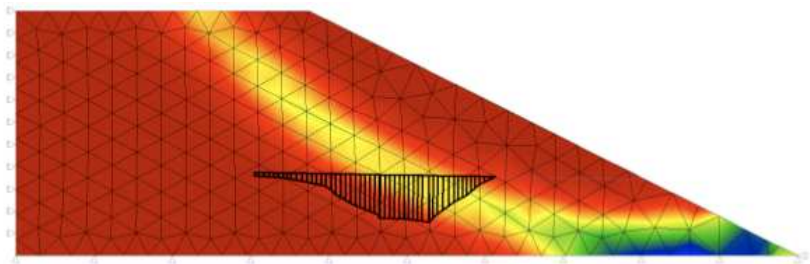
KROKY UŽIVATELE

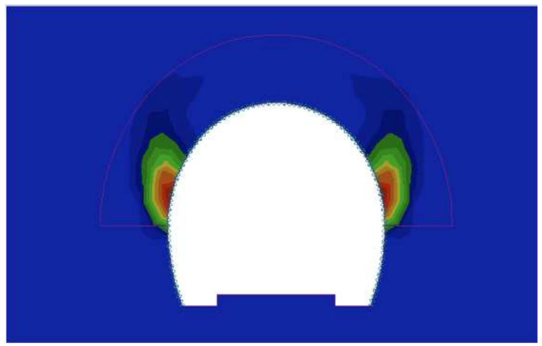
1. Stanovení cílů modelování
2. Převedení reality do geotechnického modelu
3. Vytvoření numerického modelu
4. Zjištění “chování” numerického modelu
   – numerický výpočet
5. Vyhodnocení výsledků

2. MKP OBECNĚ

<u>Stanovení cílů modelování</u>

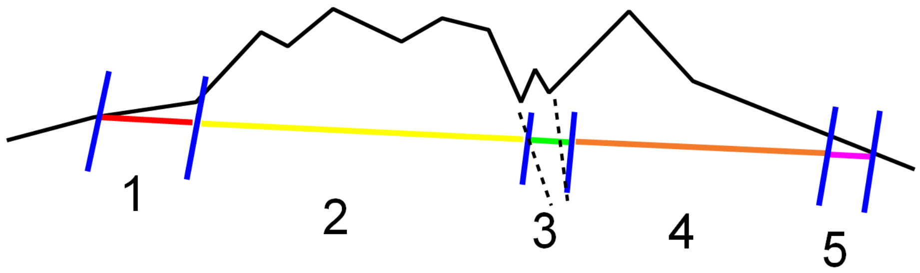
- stabilita svahů
- napěťodeformační stav v okolí podzemního díla
- statické řešení výztužní konstrukce
- sdružená úloha

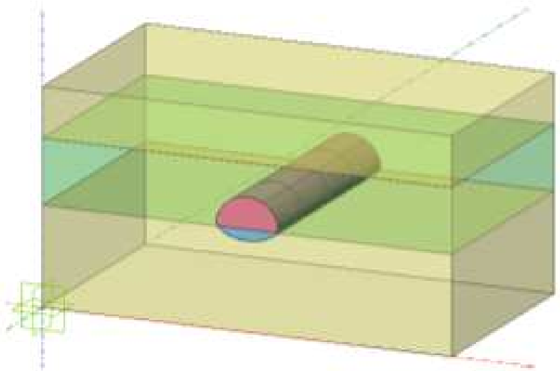


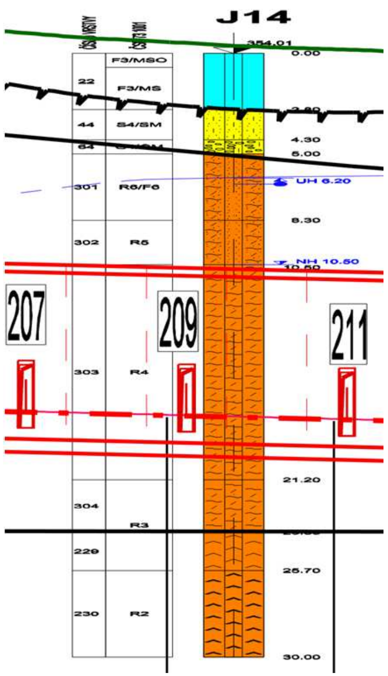


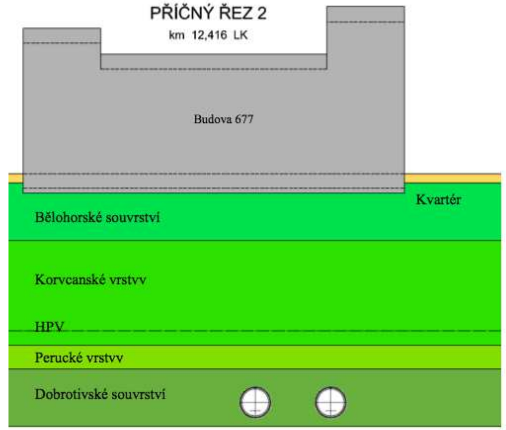
2. MKP OBECNĚ

Převedení reality do geotechnického modelu



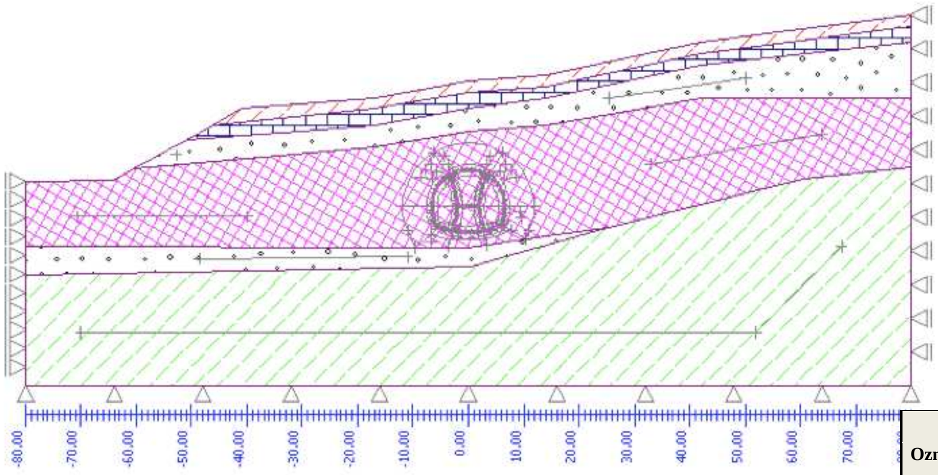


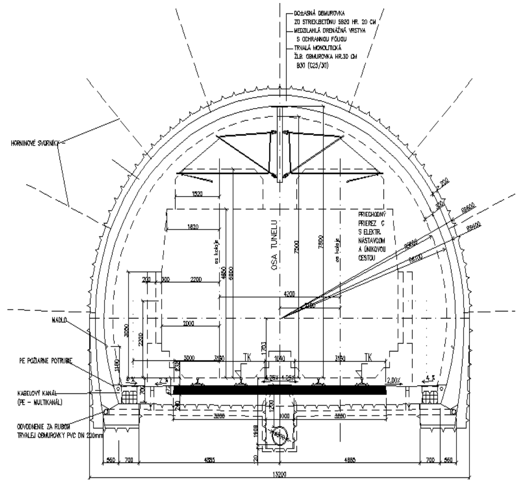




2. MKP OBECNĚ

Vytvoření numerického modelu

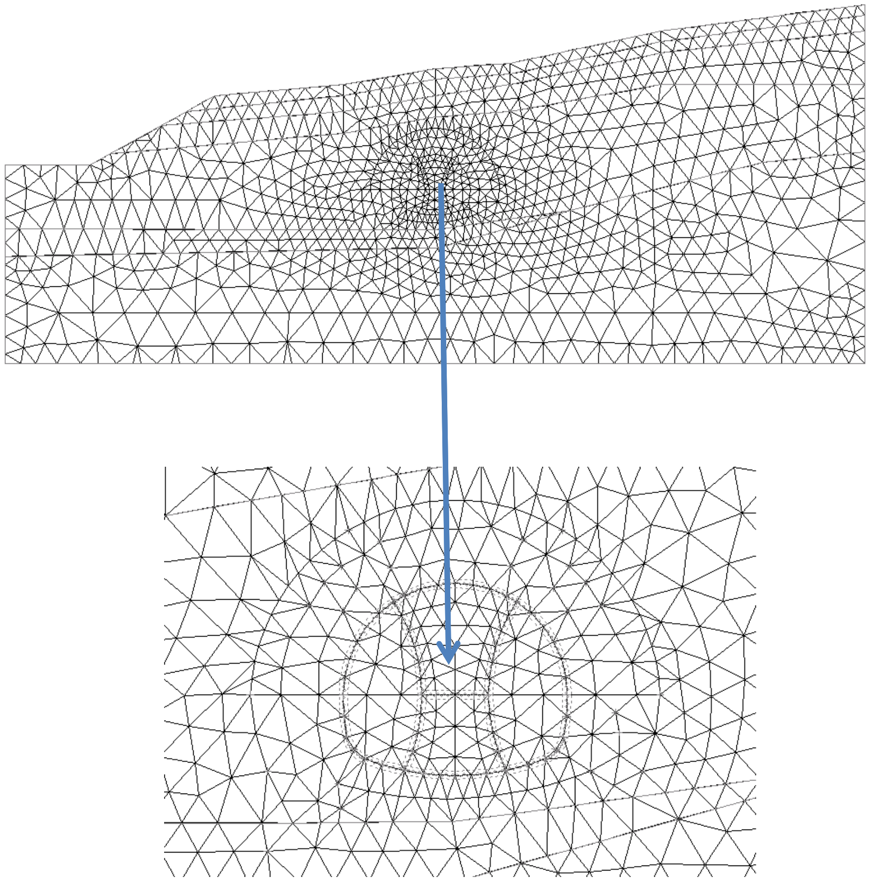


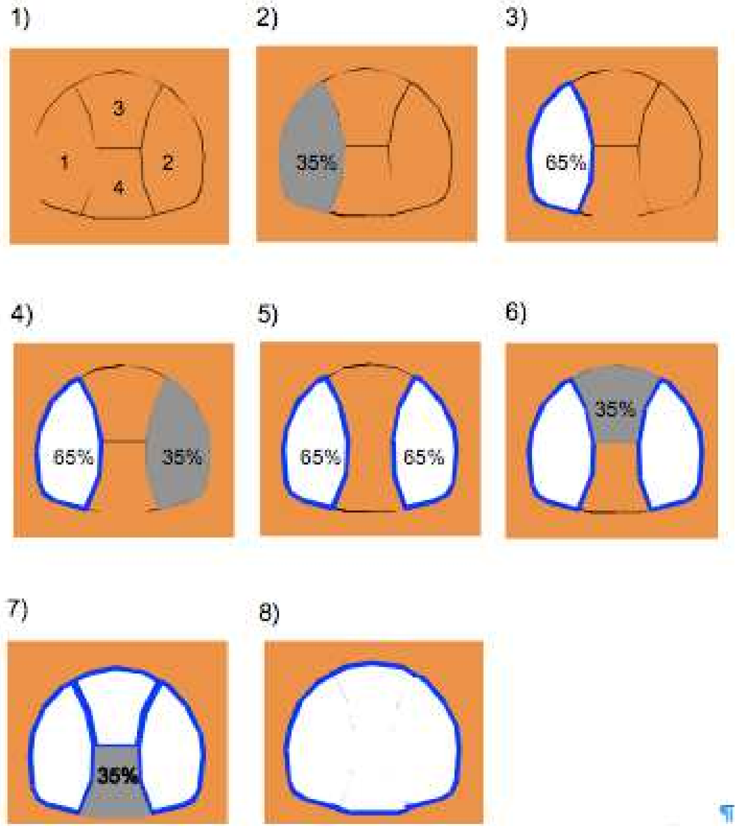


Označenie	Geologická vrstva	Charakteristika				
		γ [kN/m^3]	E [MPa]	ν [-]	φ [°]	c [kPa]
1	**Spraš – trieda F6, konzistencia tuhá**	21	12	0,4	19	12
2	**Suť piesčitá – trieda F6, konzistencia tuhá**	21	30	0,4	19	12
3	**Sprašové sute – trieda F6**	21	30	0,4	25	24
4	**Deluviálne sedimenty, konzistencia tuhá**	21	36	0,4	25	24
5	**Sprašové sute – trieda F6**	21	30	0,4	25	24
6	**Dolomity**	24	1000	0,2	25	24

2. MKP OBECNĚ

Vytvoření numerického modelu



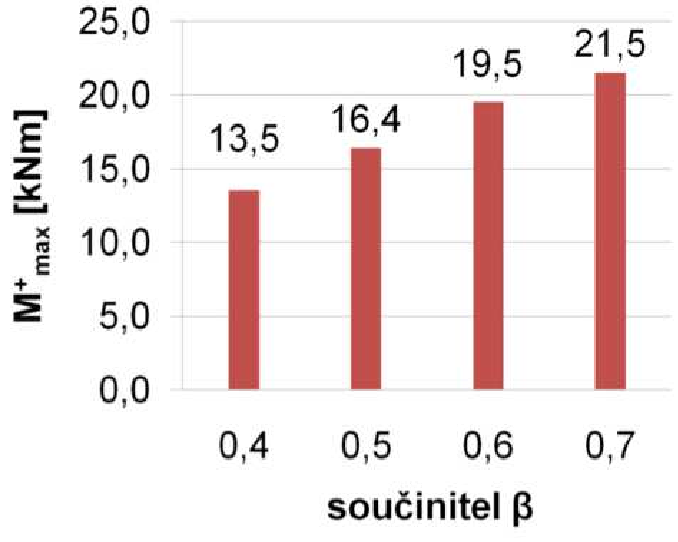


2. MKP OBECNĚ

Zjištění “chování” numerického modelu – výpočet

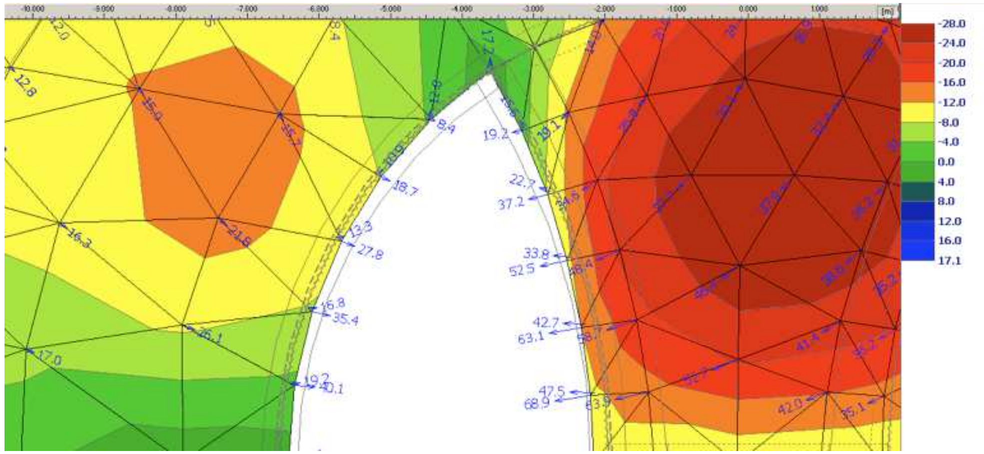
První model řešený v jakémkoliv programu nebude bezchybný.

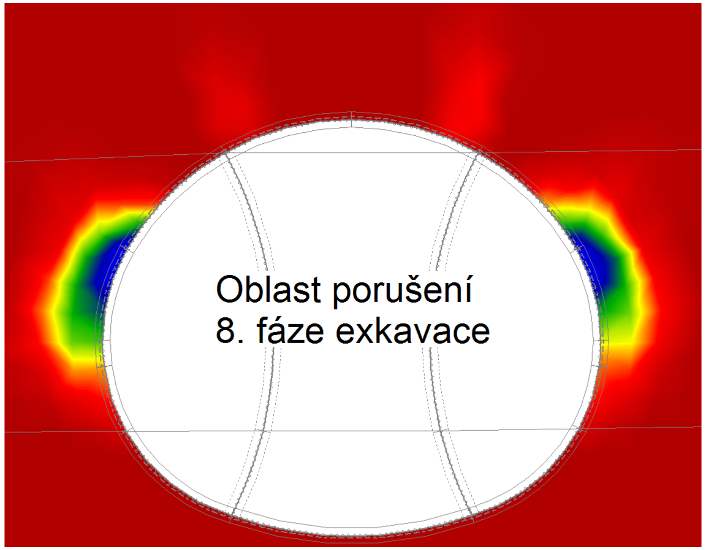
Jedná se o modelování – tj. měla by být série simulací

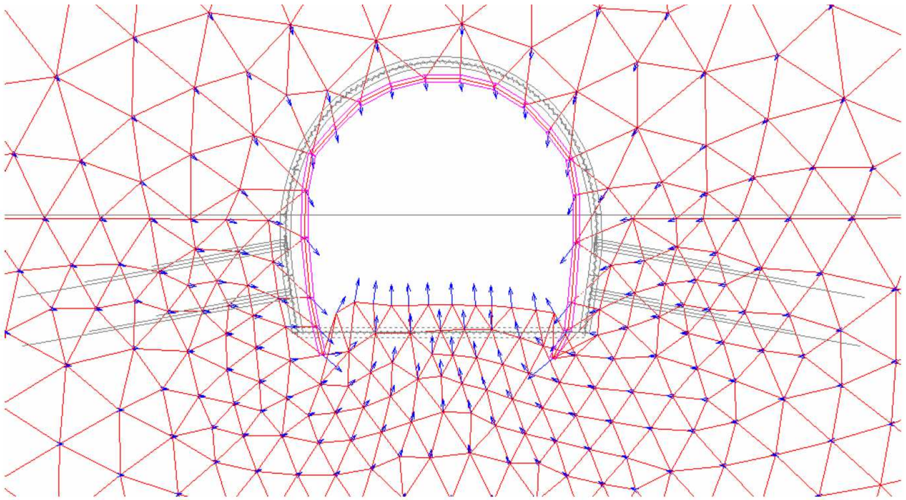


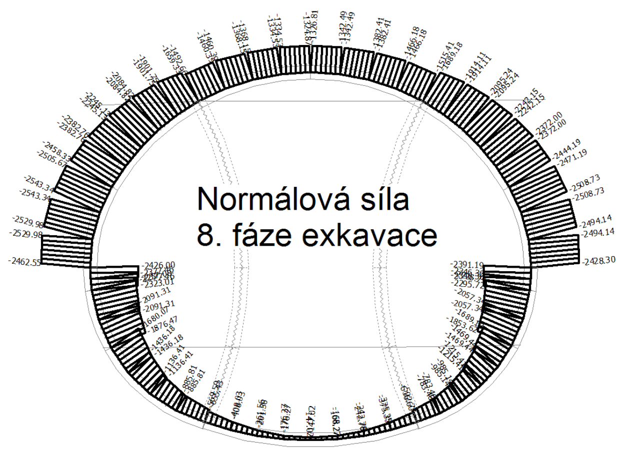
2. MKP OBECNĚ

Vyhodnocení výsledků





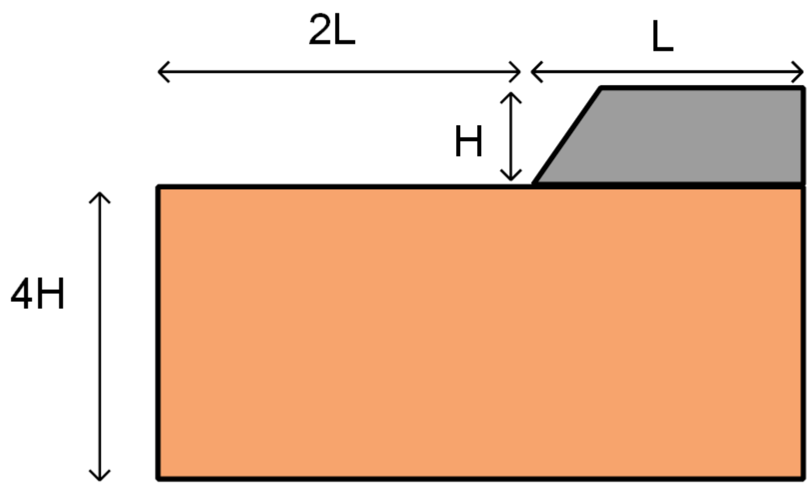


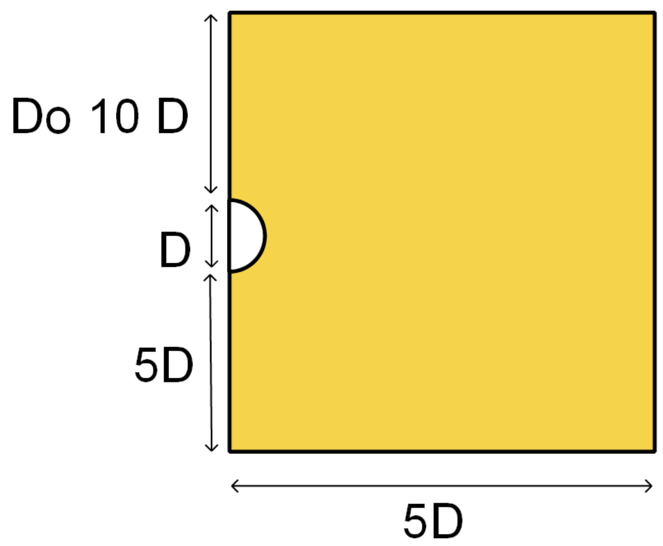


2. MKP OBECNĚ

ROZSAH NUMERICKÉHO MODELU

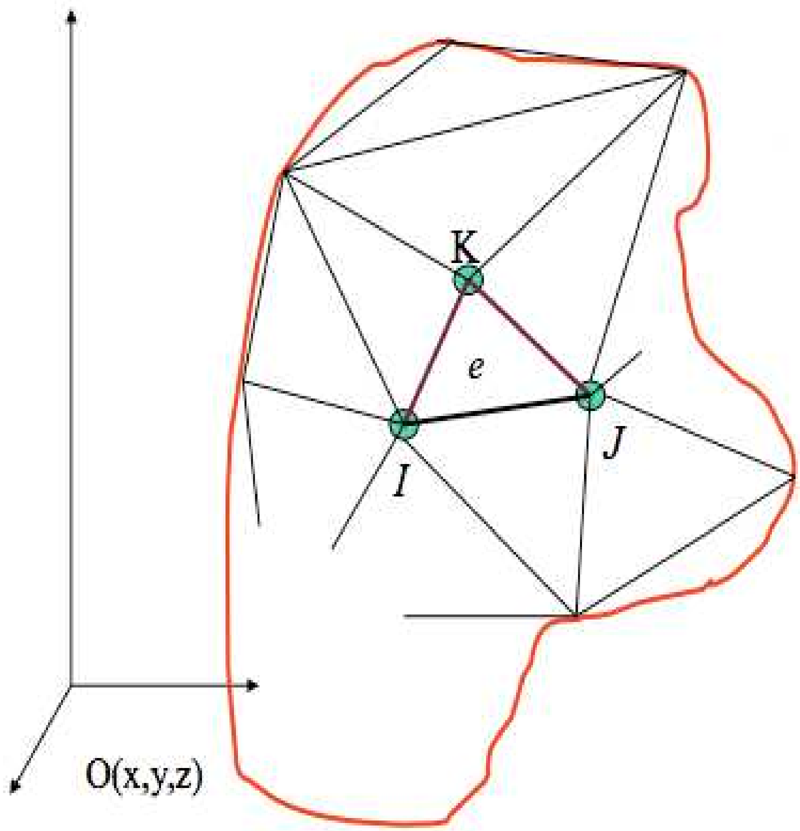
hranice by měly být v místech , kde se již neočekávají změny napětí resp. deformací





3. ZÁKLADNÍ PRINCIPY 2D MKP

Řešená spojitá oblast je rozdělena (diskretizována) na jednoduché geometrické tvary – prvky (elementy).

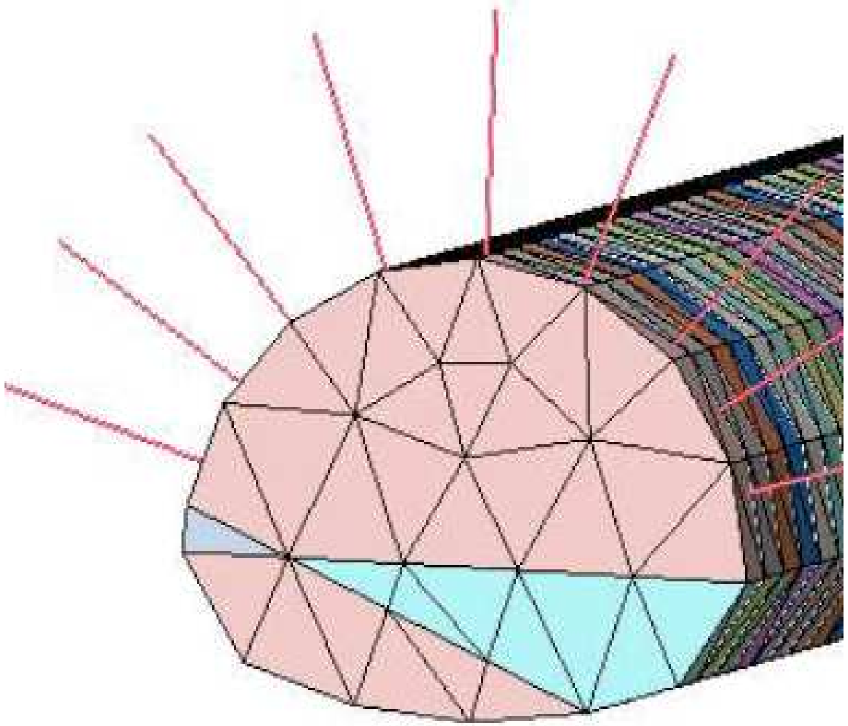


e – prvek

I,J,K - uzly

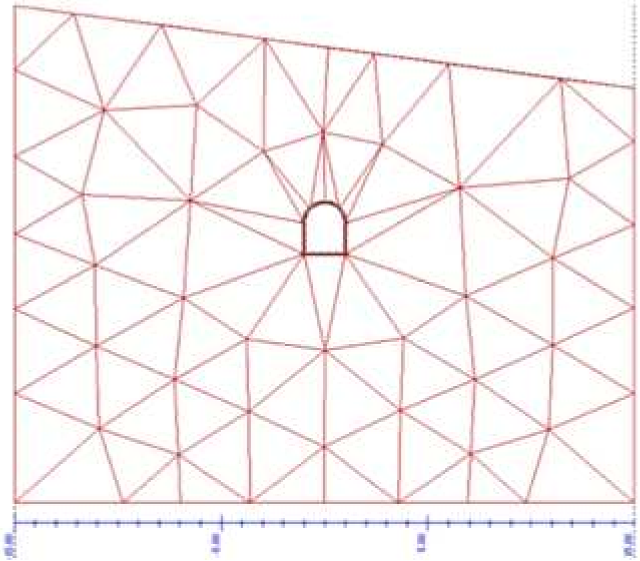
3. ZÁKLADNÍ PRINCIPY 2D MKP

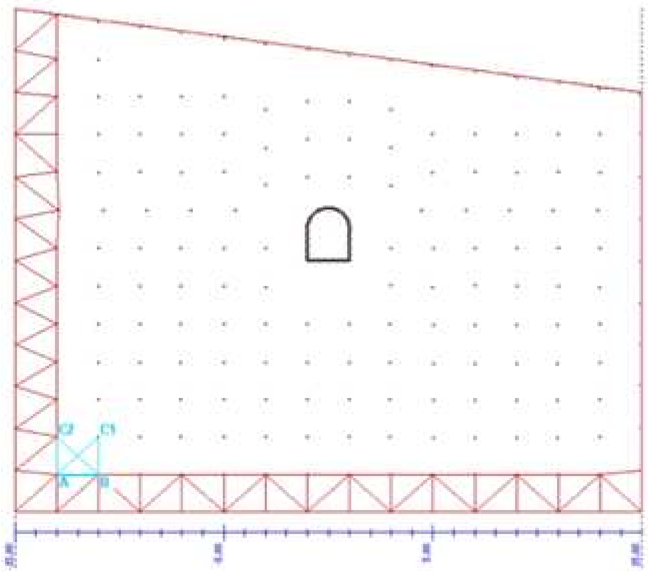
Jednorozměrné prvky

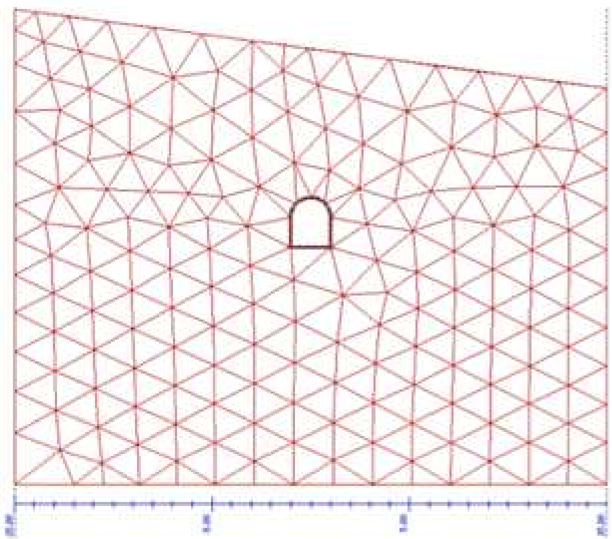


3. ZÁKLADNÍ PRINCIPY 2D MKP

Plošné prvky

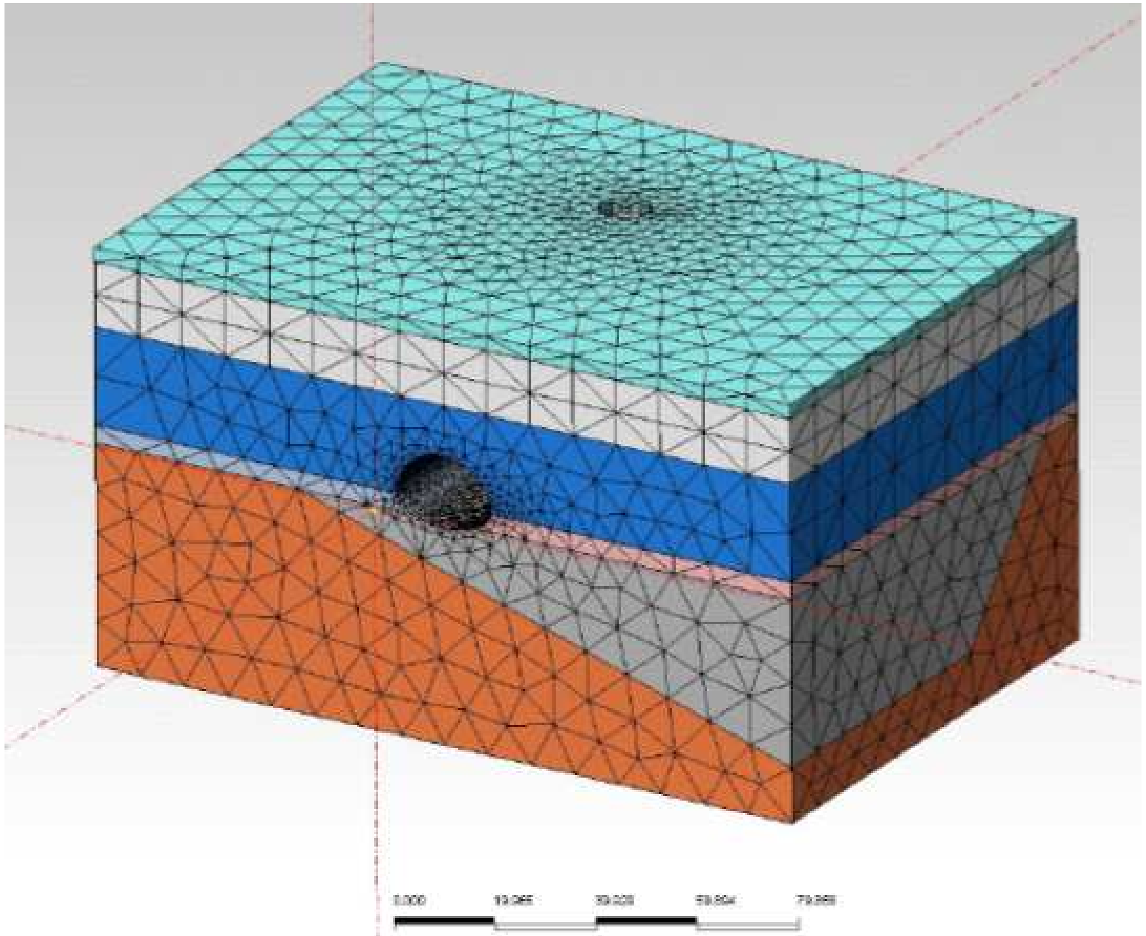






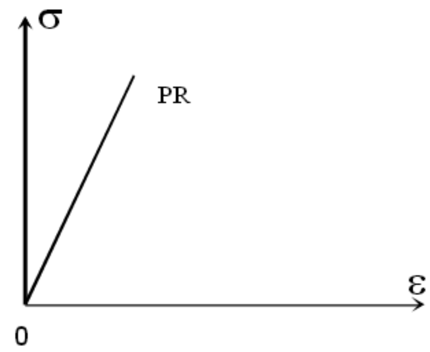
3. ZÁKLADNÍ PRINCIPY 2D MKP

Prostorové prvky



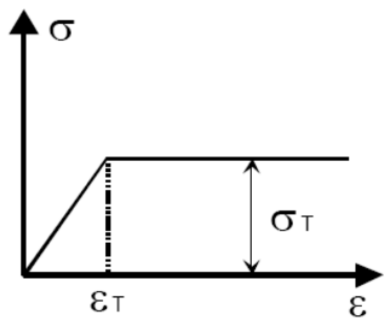
3. ZÁKLADNÍ PRINCIPY 2D MKP

Prvkům jsou přiřazeny materiálové vlastnosti (konstitutivní vztah) a jejich zatížení



- <u>přetvárné vlastnosti</u>

modul pružnosti E,
smykový modul pružnosti,
Poissonovo číslo



- <u>pevnostní vlastnosti</u>

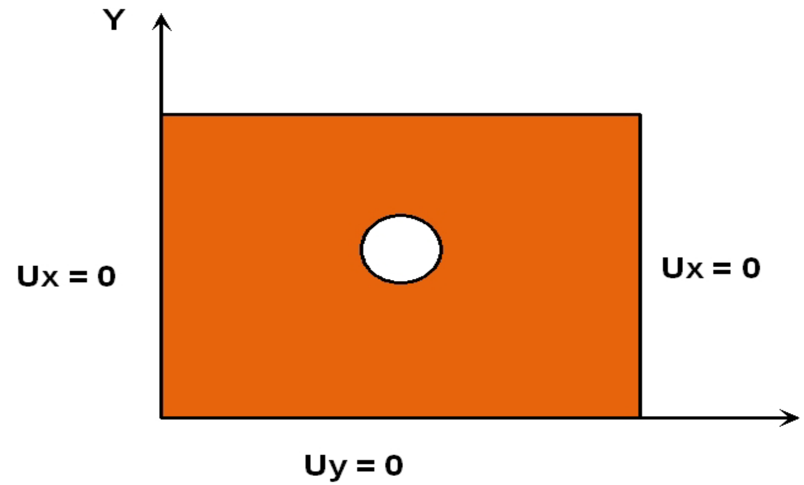
soudržnost, úhel vnitřního tření

- <u>popisné vlastnosti</u>
  objemová tíha, pórovitost

3. ZÁKLADNÍ PRINCIPY 2D MKP

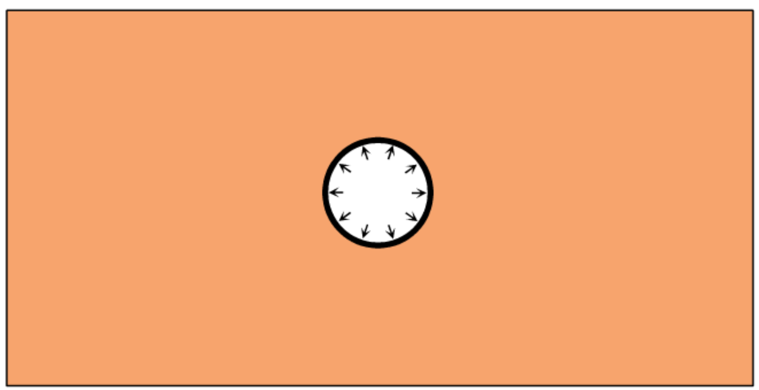
Zavedení okrajových podmínek

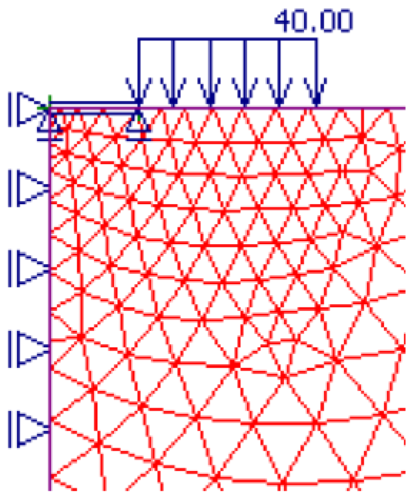
- geometrické



- silové

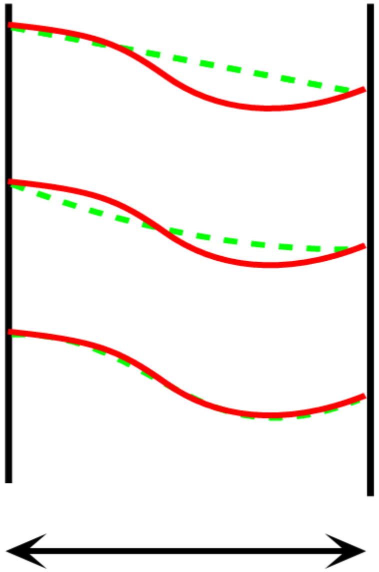
(přitížení povrchu, vnitřní tlak vody)





3. ZÁKLADNÍ PRINCIPY 2D MKP

Pro každý prvek se nalezne vztah mezi posuny v uzlech a v libovolném místě prvku. Neznámé funkce posuvů se obvykle aproximují ve formě mnohočlenů.

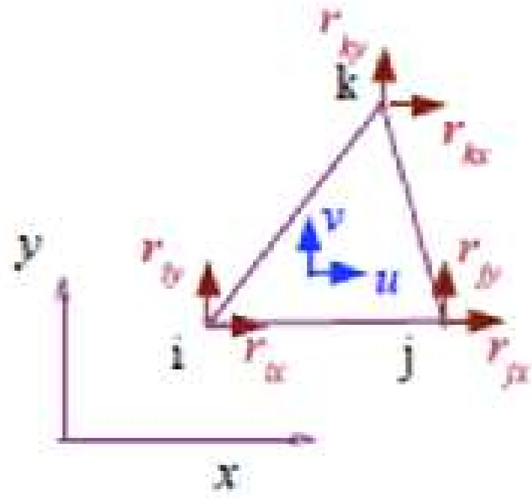


oblast prvku

$$u = a_0 + a_1 x$$

$$u = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$u = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$



3. ZÁKLADNÍ PRINCIPY 2D MKP

Obdobně se vyjádří přetvoření pomocí zobecněných uzlových posunů,

zavedou se vnější síly (zatížení) a definuje se celková potenciální energiu prvku Π:

$$\Pi = \Pi_i - \Pi_e$$

kde:

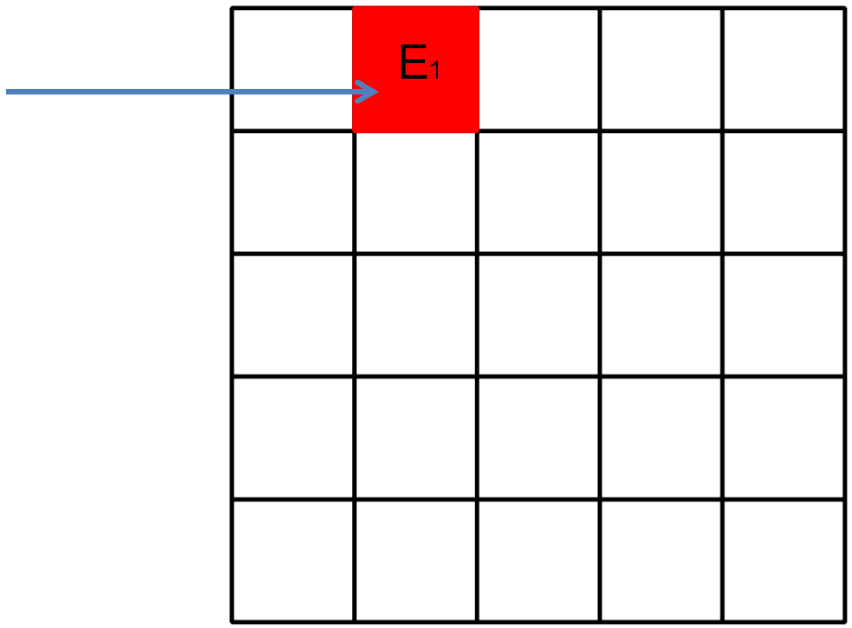
Π_i energie vnitřních sil (celková energie napětí)

Π_e práce vnějších sil

3. ZÁKLADNÍ PRINCIPY 2D MKP

Neznámé hodnoty posunů v uzlových bodech se stanoví z podmínek minimalizace funkcionálu potenciální energie Π. Po derivaci se tedy získá základní algebraická rovnice rovnice MKP:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & \cdots & K_{1n}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1}^1 & \cdots & K_{nn}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ \vdots \\ u_n^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^1 \\ \vdots \\ F_n^1 \end{bmatrix}$$



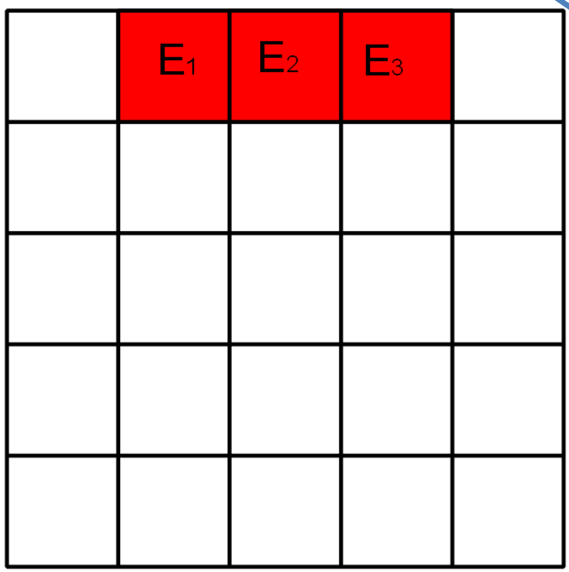
3. ZÁKLADNÍ PRINCIPY 2D MKP

Dále se sestaví matice tuhosti celé konstrukce z prvkových algebraických rovnic.

$$\begin{bmatrix} K_{11}^2 & \cdots & K_{1n}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1}^2 & \cdots & K_{nn}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^2 \\ \vdots \\ u_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^2 \\ \vdots \\ F_n^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & \cdots & K_{1n}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1}^1 & \cdots & K_{nn}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ \vdots \\ u_n^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^1 \\ \vdots \\ F_n^1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^3 & \cdots & K_{1n}^3 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1}^3 & \cdots & K_{nn}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^3 \\ \vdots \\ u_n^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^3 \\ \vdots \\ F_n^3 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{N1} & \cdots & K_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix}$$

3. ZÁKLADNÍ PRINCIPY 2D MKP

Před vlastním řešením se zavedou okrajové podmínky a následně se řeší výsledné soustavy algebraických rovnic

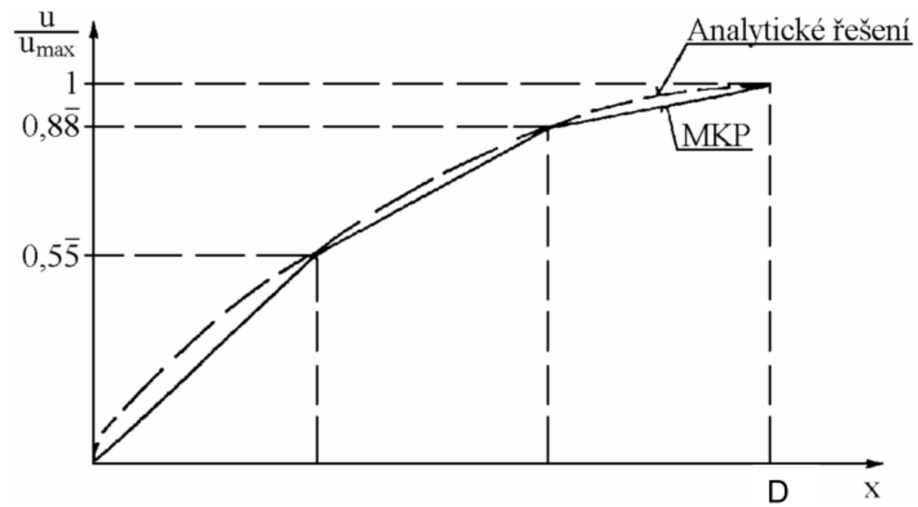
$$\mathbf{K}\mathrm{u}=\mathbf{F}$$

kde:

K globální matice tuhosti

F vnější zatížení

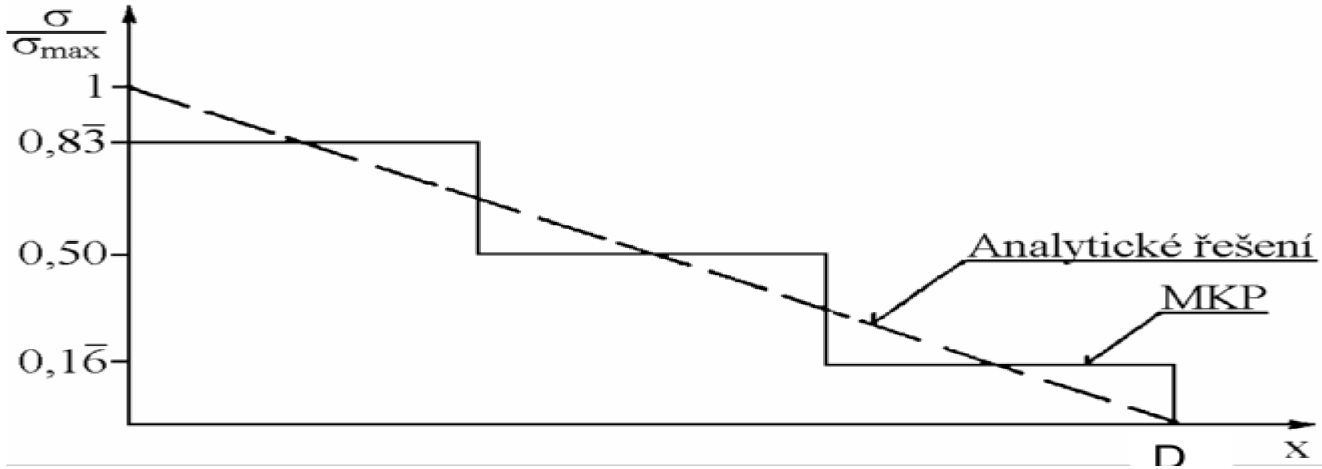
u neznámé (posuny)



3. ZÁKLADNÍ PRINCIPY 2D MKP

Výpočet výsledků na konečných prvcích

- Z vektoru u posunů spočteme posuny na prvcích
- Pro každý prvek stanovíme poměrné deformace (přetvoření) pomocí geometrických vztahů
- Pro každý prvek stanovíme napětí pomocí konstitutivních vztahů



3. ZÁKLADNÍ PRINCIPY 2D MKP

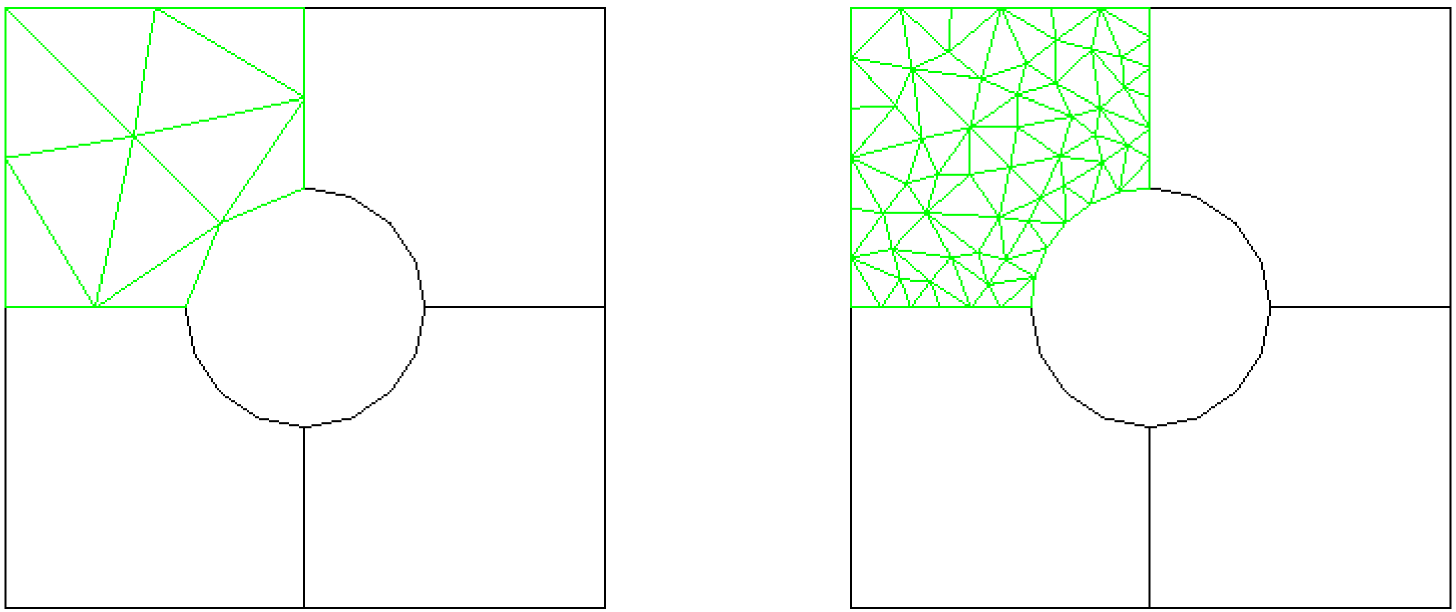
HLAVNÍ ZDROJE CHYB V TYPICKÉ ÚLOZE MKP

- chyby diskretizace
- chyby ve formulování úlohy
- numerické chyby

3. ZÁKLADNÍ PRINCIPY 2D MKP

Chyby diskretizace

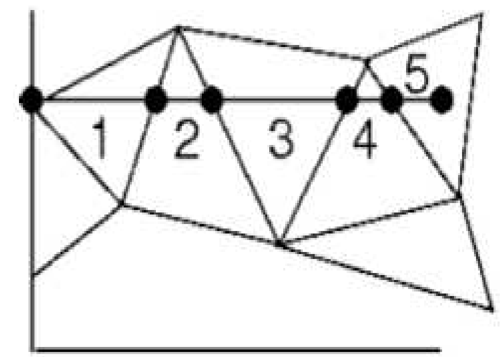
plynou z transformování kontinua do modelu konečných prvků a mohou být vztaženy na modelování tvaru hranice řešené oblasti, hraniční podmínky a aproximací sítí konečných prvků.

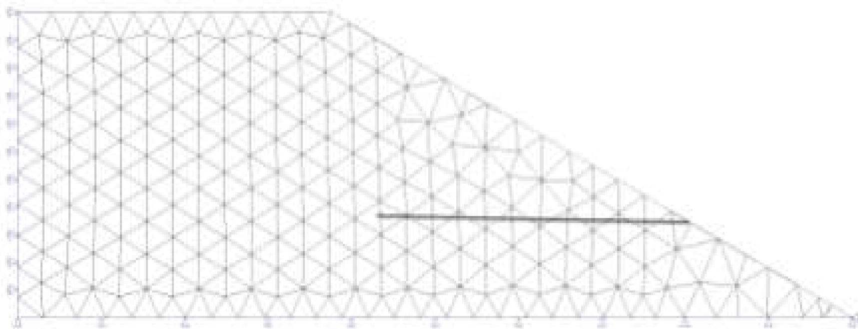


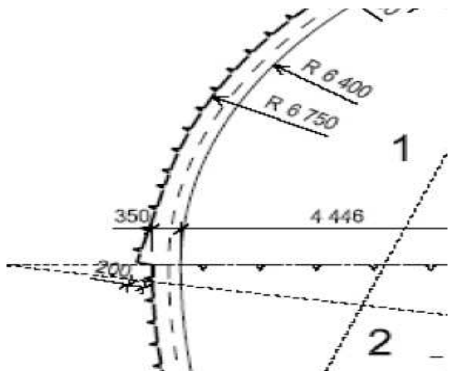
3. ZÁKLADNÍ PRINCIPY 2D MKP

Chyby ve formulování úlohy

spočívají v použití prvků, které nepřesně popisují chování či fyzikální jev.







3. ZÁKLADNÍ PRINCIPY 2D MKP

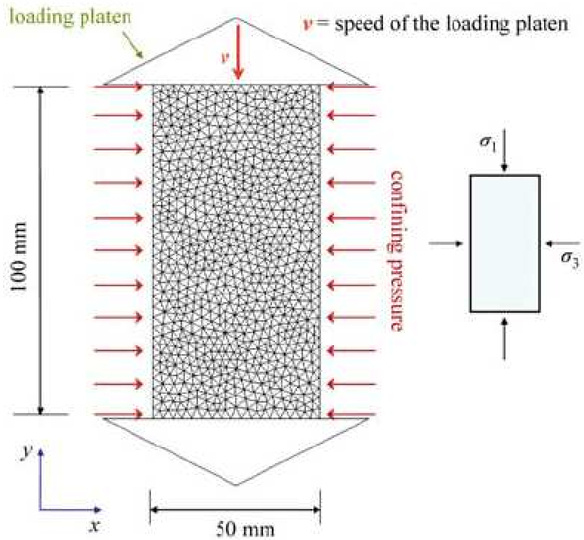
Numerické chyby

- vyskytují se jako výsledek numerického výpočetního postupu a zahrnují chyby v zaokrouhlování čísel a krácení počtu desetinných míst
- iterační chyby (týkají se hlavně vývojářů programů)

4. MOŽNOSTI MODELOVÁNÍ

INTERPRETACE LABORATORNÍCH ZKOUŠEK

rozdělení napětí, lokalizace deformace

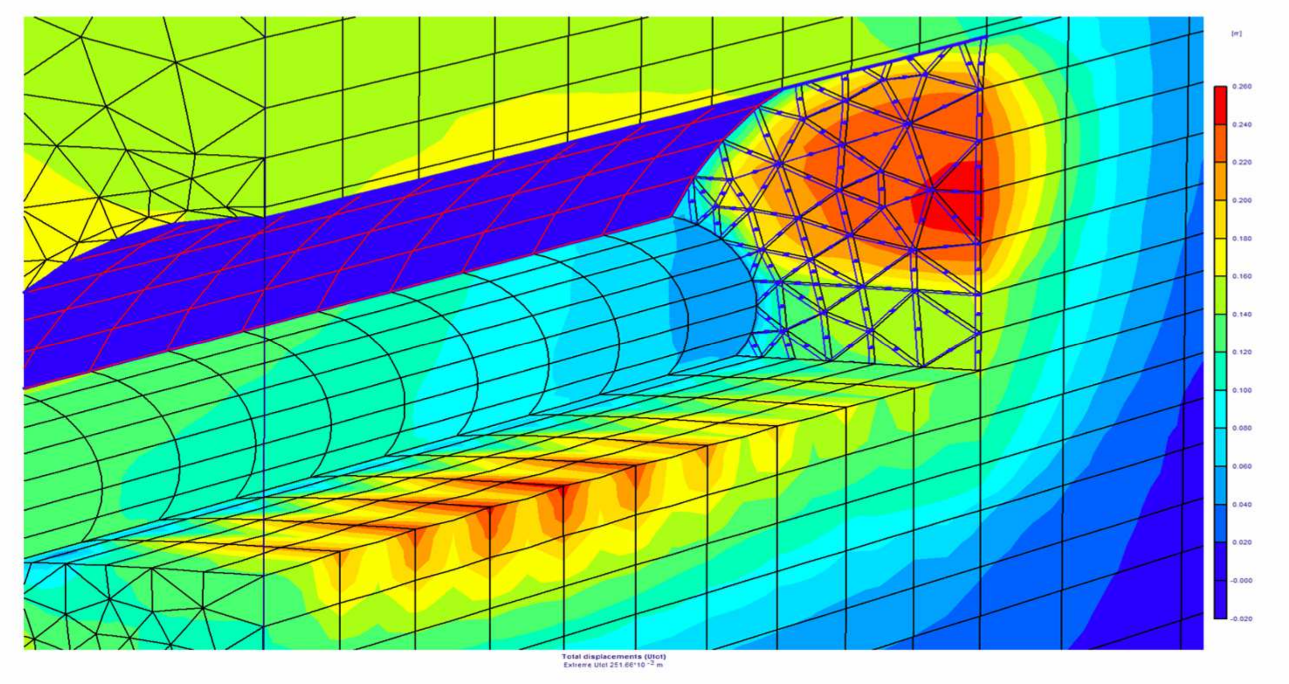


Grasselli G. 2007

4. MOŽNOSTI MODELOVÁNÍ

<u>INTERPRETACE ÚDAJŮ Z MONITORINGU</u>

využití pro plánování umístění monitorovacích bodů

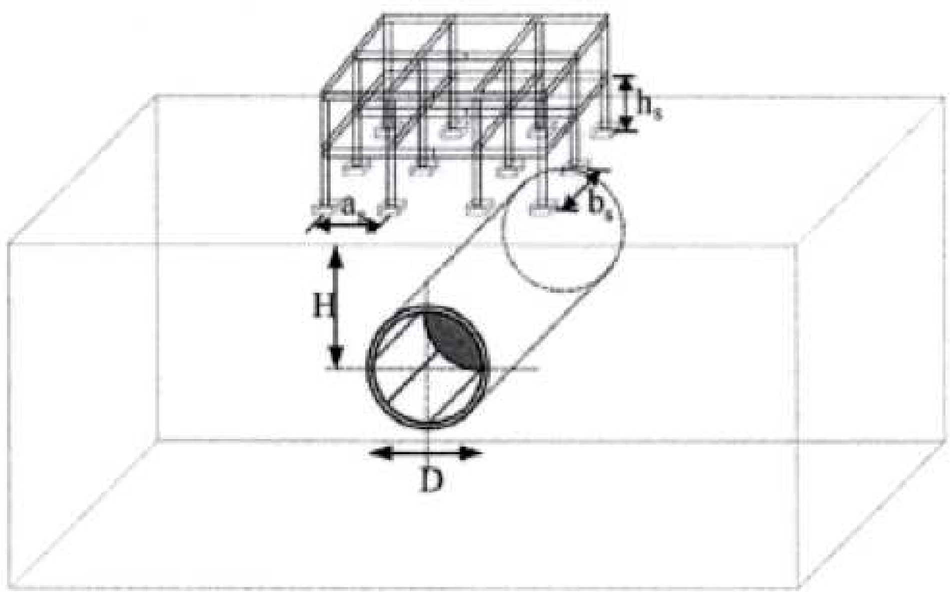


Serkan U. 2006

4. MOŽNOSTI MODELOVÁNÍ

VÝVOJ JEDNODUCHÝCH EMPIRICKÝCH VZTAHŮ NA ZÁKLADĚ NUMERICKÝCH STUDIÍ

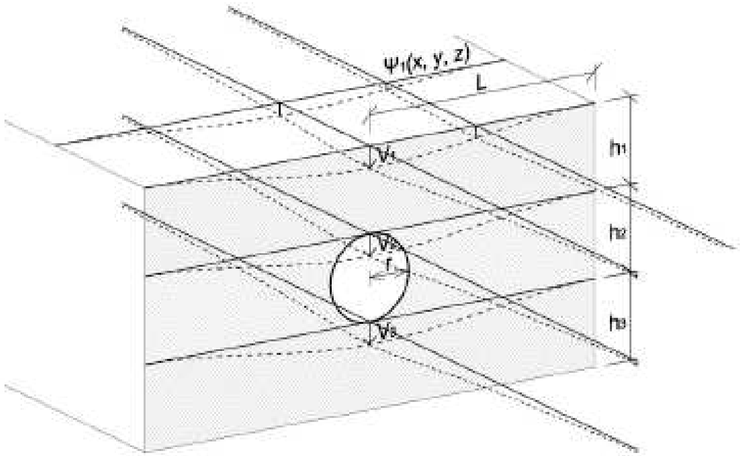
například pro určení deformace budovy nad výrubem tunelu



Mroueh and Shahour (2003)

4. MOŽNOSTI MODELOVÁNÍ

NUMERICKÉ METODY USNADŇUJÍ POCHOPENÍ ANALYTICKÝCH A SEMIANALYTICKÝCH METOD A UMOŽŇUJÍ JEJICH DALŠÍ ROZVOJ



$\psi_i(x, y, z)$ z 2D/3D modelu

$i = 1, 2, 3$

$$\mathbf{K}_{(3,3)} \boldsymbol{r}_{(3,1)} = \boldsymbol{R}_{(3,1)}$$

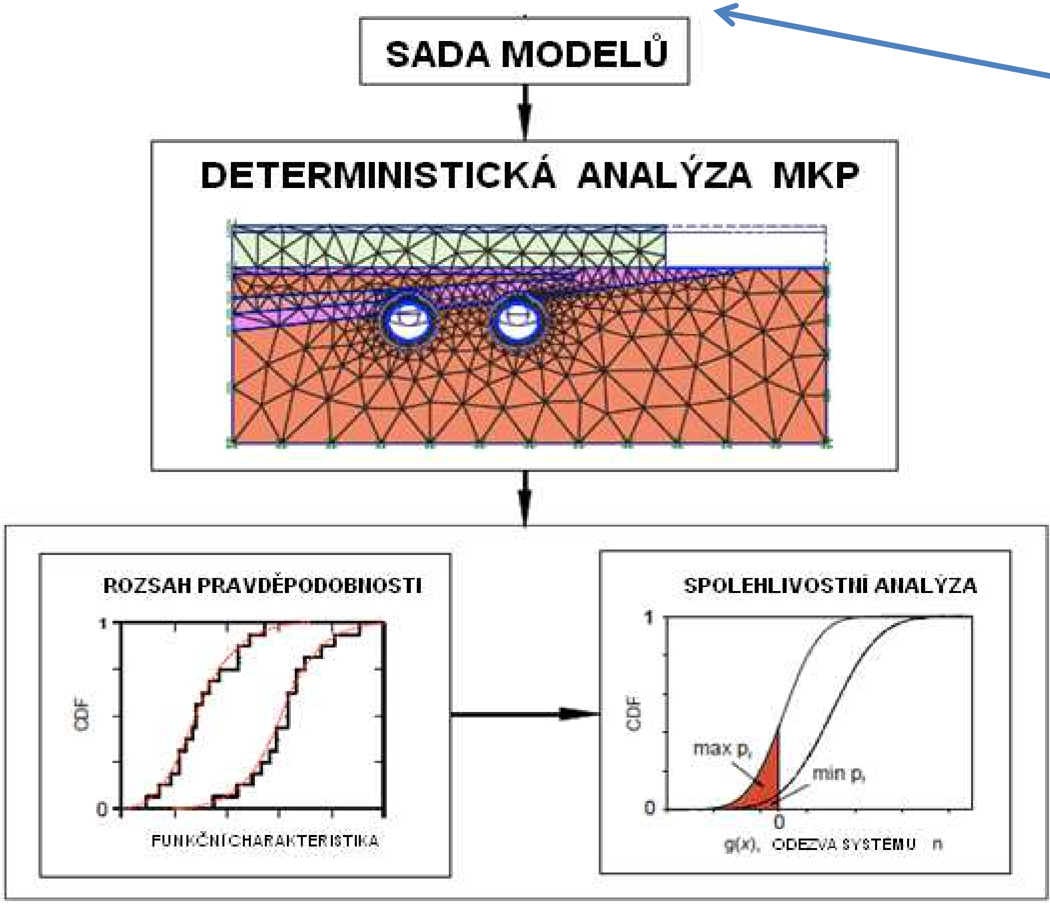
$$\mathbf{X} = (X_1, X, \ldots, X_m)$$

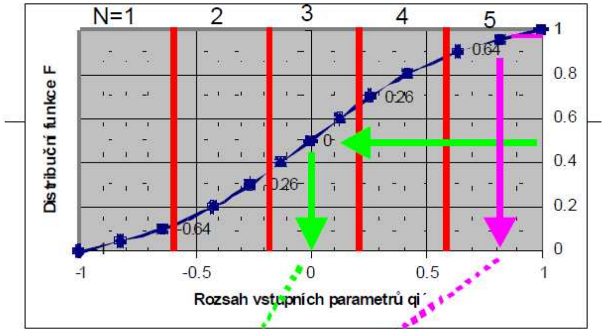
Výsledkem jsou „modelové“ posuvy v libovolném bodě v závislosti na parametrech modelu

Šejnoha J. 2013

4. MOŽNOSTI MODELOVÁNÍ

NUMERICKÉ METODY UMOŽŇUJÍ RIZIKOVÉ ANALÝZY





Výpočet	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
1	4	2	2	5	3
2	1	3	5	2	1
3	3	5	3	4	5
4	5	1	4	3	4
5	2	4	1	1	2

Peschl, 2004

5. ZÁVĚR

- Nejdůležitější je správné vystižení materiálových vlastností hornin a zemin.
- Dnešní programy mají zabudovány speciální prvky či materiálové vztahy, které neodpovídají našim zvyklostem a je tedy nutné si je osvojit.
- Chyby je možno odhalit jen pokud jednoduchý model postupně zesložiťujeme.

5. ZÁVĚR

- I ten nejdokonalejší numerický model je pouze přiblížení skutečnosti, lineární prvky dávají nespojité výsledky pro přetvoření a napětí.
- Shoda modelu s realitou závisí na podrobnosti a přesnosti vstupních údajů, na zkušenostech statika, ale i na kvalitě realizace stavby.
- Podrobnější či komplikovanější model nemusí být zárukou přesnějších výsledků!

5. ZÁVĚR

V případě složitých geotechnických podmínek a současného spolupůsobení více vlivů jsou numerické metody

"**<u>jedinou záchranou</u>**"

Děkuji za pozornost